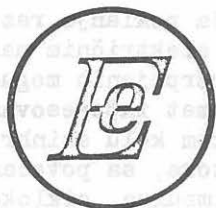


SRPSKA AKADEMIJA NAUKA I UMETNOSTI I
ELEKTROTEHNIČKI INSTITUT "NIKOLA TESLA" - BEOGRAD

DRUGO SAVETOVANJE O ENERGETSKOJ ELEKTRONICI

Dr Vladan VUČKOVIĆ, dipl.ing.
Elektrotehnički institut "Nikola Tesla", Beograd

KOMPLEKSNE PROMENLJIVE U ANALIZI USTALJENIH I PRELAZNIH
POJAVA U ASINHRONOM MOTORU SA NESINUSNIM NAPAJANJEM



BEOGRAD

novembra 1975.

Vladan Vučković

KOMPLEKSNE PROMENLJIVE U ANALIZI USTALJENIH I PRELAZNIH
POJAVA U ASINHRONOM MOTORU SA NESINUSNIM NAPAJANJEM

SADRŽAJ

Posle uvoda u kome se sažeto iznose polazne pretpostavke i primenjene transformacije prezentira se kompleksni matematički model asinhronog motora. Zatim se razvija jedna metodologija primene ovoga modela u analizi i tumačenju pojava u asinhronom motoru koji se napaja naponima proizvoljnog stepenastog talasnog oblika i sa proizvoljnim brojem faza, odnosno pulseva u periodu. Da bi se ilustrovao način primene i njene prednosti posebno se analiziraju oni tipovi višefaznih talasnih oblika na koje se nailazi kod invertorskog napajanja motora sa raznim spregama faznih navoja i daju konkretni rezultati u vidu dijagrama iz kojih se može videti uticaj broja faza, parametara motora, sprege, njegovog režima rada i učestanosti napajanja na talasne oblike struja i pulsacije momenta. Iako su ovi grafici dobijeni uz pomoć računске mašine moguće je sa izvesnim uprošćenjima doći i do eksplicitnih formula iz kojih se mogu neposredno proučavati odnosi i uticaji - što je takodje izloženo u članku.

1. UVOD

U poslednje vreme se posebna pažnja poklanja razvijanju matematičkih metoda za analizu pojava u električnim mašinama sa tiristorima. Zbog svojih još uvek neiscrpljenih mogućnosti razvoja i praktičnog značaja naročiti predmet interesovanja predstavljaju tiristorski invertori u statorskom kolu asinhronog motora (npr. pitanje posebnih konstrukcija motora, sa povećanim brojem faza i dr., princip modulacije širine impulsa, ciklokonvertori, strujni invertori itd.).¹⁻⁵

U ovom radu biće učinjen pokušaj da se izloži jedna metoda za analizu ustaljenih i prelaznih pojava u ovakvim siste-

Dr Vladan Vučković, dipl. inž.
rukovodilac OOUR za automatiku i regulaciju
u Elektrotehničkom institutu "Nikola Tesla"
u Beogradu

mima i istaknu njene prednosti u pogledu opštosti, bliskosti fizičkim predstavama i jednostavnosti matematičkog manipulisanja. Metoda se zasniva na primeni kompleksnih transformacija koje dovede do tzv. komponentata obrtnog polja i koje su ovde uz izvesne izmene u formi i tumačenju prilagodjene potrebama proučavanja pojava sa neharmoničnim pobudjivanjem.

Do kompleksnog matematičkog modela asinhronne mašine koji predstavlja polaznu osnovu za dalju analizu dolazi se posle niza postupaka koji ćemo ovde sažeto izložiti.

Osnovne pretpostavke su one koje su uobičajene u standarnim analizama prelaznih pojava u električnim mašinama (zanemarenje histerezisa, zasićenja, vrtložnih struja, kapacitivnosti, skoncentrisanost parametara, harmonična raspodela polja duž međjugvoždja). Dalje, uzimamo da je predmet proučavanja mašina sa simetričnim višefaznim namotajima na statoru i rotoru i sa ravnomernim međjugvoždjen. Primenom elementarnih zakona elektrotehnike i mehanike dolazi se do primitivnog matematičkog modela asinhronne mašine:

$$(1) \quad \underline{u}_s = \underline{R}_s \underline{i}_s + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_s$$

$$(2) \quad \underline{\psi}_s = \underline{L}_s \underline{i}_s + \underline{L}_{sr} \underline{i}_r$$

$$(3) \quad \underline{u}_r = \underline{R}_r \underline{i}_r + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_r$$

$$(4) \quad \underline{\psi}_r = \underline{L}_{sr}^{\dagger} \underline{i}_s + \underline{L}_r \underline{i}_r$$

$$(5) \quad m_m = \frac{J}{n} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{C}{n} \frac{d\theta}{dt} - m_e$$

$$(6) \quad m_e = \frac{n}{2} \underline{i}^{\dagger} \frac{d\underline{L}}{d\theta} \underline{i}$$

gde su \underline{i} , $\underline{\psi}$ i \underline{u} matrice - kolone (vektori) struja, magnetnih obuhvata (kratko: fluksova) i napona na pojedinim navojima višefaznog namotaja statora (indeks s) i rotora (indeks r), \underline{R}_s , \underline{R}_r , \underline{L}_s , \underline{L}_r kvadratne matrice otpornosti i inuktivnosti,

\underline{L}_{sr} u opštem slučaju pravougljena matrica induktivnosti između pojedinih navoja statorskog i rotorskog namotaja, m_e i m_m moment obrtnog polja motora i gonjene mašine, J moment inercije, C koeficijent trenja, n broj parova polova motora. Pored toga je

$$(7) \quad \theta = \int_0^t \omega dt + \theta(0)$$

gde je $\theta(0)$ električni ugao između referentne ose statora i referentne ose rotora u početnom trenutku, a

$$(8) \quad \omega = n \omega_m$$

gde je ω_m ugaona brzina rotora. (Podvučeno slovo znači matricu, a krstić njenu transpoziciju sa konjugacijom.)

Ove jednačine su neprikladne za upotrebu iz dva razloga: (1) matrice \underline{L} su pune, tj. svaki fluks je spregnut sa svakom strujom, pa je potrebno izvoditi veliki broj računskih operacija, (2) matrica \underline{L}_{sr} (a kod necilindričnog rotora i \underline{L}_s) zavise od θ , a to znači i od vremena, pa se dobijaju diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim koeficijentima. Zbog toga se vrše dve uzastopne transformacije (zamene promenljivih), koje u velikoj meri otklanjaju ove neprikladnosti.

Može se pokazati da potpunu dijagonalizaciju matrice \underline{L} (rasprezanje između fluksova i struja tako da svaki fluks zavisi samo od jedne struje statora i jedne struje rotora i to bez obzira na broj faza) sprovodi samo Forteskjuova kompleksna matrica (ili njene varijante) \underline{F} prema transformacionim obrascima:

$$(9) \quad \underline{i}_s = \underline{F}_s \underline{i}_s^F \quad \underline{\psi}_s = \underline{F}_s \underline{\psi}_s^F \quad \underline{u}_s = \underline{F}_s \underline{u}_s^F$$

$$(10) \quad \underline{i}_r = \underline{F}_r \underline{i}_r^F \quad \underline{\psi}_r = \underline{F}_r \underline{\psi}_r^F \quad \underline{u}_r = \underline{F}_r \underline{u}_r^F$$

gde su gornjim indeksom F označene nove, transformisane promenljive, tzv. trenutne simetrične komponente⁹. Opšti član unitarizovane matrice \underline{F} (za ma koji broj faza q) glasi¹⁰:

$$(11) \quad F_{qik} = \frac{1}{\sqrt{q}} \alpha^{ik}, \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, q-1, \quad \alpha = e^{j2\pi/q}$$

(j je imaginarna jedinica, a crta iznad slova znači konjugaciju).

Za drugu transformaciju, sa ciljem da se matrice \underline{L} oslobode zavisnosti od vremena, a da se ostane pri potpunom rasprezanju, ima (uz više varijanti koje malo menjaju suštinu) dve mogućnosti¹¹. To su transformacije relativnog kretanja statora

na rotorski (\underline{G}_s), odn. rotora na statorski koordinatni sistem (\underline{G}_r). Kod necilindričnog rotora postoji samo prva mogućnost. S obzirom na neharmonično napajanje asinhronog motora sa strane statora, što je predmet ovog razmatranja, ovde će biti primenjena \underline{G}_r - transformacija, dakle transformacija koja se primenjuje samo na rotorske promenljive prema obrascima:

$$(12) \quad \underline{\dot{i}}_r = \underline{G}_r \underline{\dot{i}}_r \quad \underline{\psi}_r = \underline{G}_r \underline{\psi}_r \quad \underline{u}_r = \underline{G}_r \underline{u}_r$$

dok statorske ostaju iste:

$$(13) \quad \underline{\dot{i}}_s = \underline{\dot{i}}_s \quad \underline{\psi}_s = \underline{\psi}_s \quad \underline{u}_s = \underline{u}_s$$

Transformaciona matrica je dijagonalna i ima onoliko članova koliki je broj faza na rotoru. Ona glasi

$$(14) \quad \underline{G}_r = \text{diag} [0 \ e^{-j\theta} \ 0 \ \dots \ 0 \ e^{j\theta}]$$

Kada se članovi prvobitnih matrica \underline{L} odrede uzimajući u obzir geometrijske odnose između navoja i konstruktivne parametre mašine^{12,11}, izvrši svodjenje rotorskih veličina na statorske prema odnosu ampervojaka i izvrše navedene transformacije pomoću matrica $\underline{E}_r = \underline{F}_r \underline{G}_r$, odn. $\underline{E}_s = \underline{F}_s$ dobija se kompleksni matematički $\underline{F} \underline{G}_r$ - model asinhronne mašine, koji ćemo ovde napisati u-formi od svega pet algebarskih jednačina:

$$(a) \quad u_s = R_s i_s + \Lambda_s \frac{di_s}{dt} + \frac{d\psi}{dt}$$

$$(b) \quad 0 = u_r = (R_r - j\omega \Lambda_r) i_r + \Lambda_r \frac{di_r}{dt} + \frac{d\psi}{dt} - j\omega \psi$$

$$(c) \quad \psi = M (i_s + i_r)$$

$$(d) \quad m_m = \frac{J}{\pi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{C}{\pi} \omega - m_e$$

$$(e) \quad m_e = \pi j (i_r \bar{\psi} - \bar{i}_r \psi)$$

Ovim jednačinama se mogu u izvesnim posebnim slučajevima (nesimetrija faza i dr.) dodati još $(q_s - 2) + (q_r - 2)$ nezavisnih realnih jednačina sa "uopštenim nultim komponentama", npr. u slučaju trofazno-trofazne mašine još:

$$(f) \quad u_{s0} = R_s i_{s0} + \Lambda_s \frac{di_{s0}}{dt}$$

$$(g) \quad u_{r0} = R_r i_{r0} + \Lambda_r \frac{di_{r0}}{dt}$$

Ovde su R i Λ otpornosti i induktivnosti rasipanja statora i rotora, a M induktivnost magnećenja. Dok su promenljive m , m_m i ω realne, promenljive i , ψ i u su kompleksne i one sa po dva podatka reprezentuju sve struje, zajednički obrtni fluks i sve napone na navojima statora i rotora bez obzira o kom broju faza se radi (izuzev u pomenutim posebnim slučajevima).

Može se pokazati da se u slučaju ustaljenog stanja sa harmoničnim pobudjivanjem između pojedinih kompleksnih promenljivih, pogotovu kada se prikažu u Gausovoj ravni, dobijaju isti odnosi kao kod kompleksnog (tzv. simboličnog, fazorskog, vektorskog ili vektorskog) predstavljanja harmoničnih veličina. Zbog toga se promenljive posle FG_r -transformacije mogu nazvati npr. uopštenim fazorima, koji reprezentuju ne samo ustaljene sinusne veličine, već i veličine koje se javljaju u prelaznim stanjima sa bilo kakvim pobudjivanjem. Drugim rečima, pomoću FG_r -transformacije mogu se fazori kod višefaznih sistema definisati na egzaktni i uopšten način.

Cilj sledećeg razmatranja je da se, na izvesnom broju posebnih slučajeva, pokaže i istakne praktičnost i fizička preglednost metode koja se zasniva na primeni FG_r - jednačina. Kao što će se videti ova praktičnost potiče ne samo od jednostavnosti modela, već i od njene besfaznosti: broj faza mašine i invertora, kao i broj i način prekidanja u toku periode, odražava se samo na oblik vremenske zavisnosti jedne kompleksne promenljive (pobudnog fazora u_s , i_s , odn. x).

2. FG_r -TRANSFORMACIJA IZLAZNIH NAPONA SIMETRIČNIH VIŠEFAZNIH INVERTORA

Na nekoliko praktičnih primera pokazaćemo način i rezultat transformisanja višefaznih napona, koji sa invertora dospevaju na fazne navoje motora, sa ciljem da se dodje do funkcije uopštenog fazora u_s od vremena. Pošto se radi o statorskim naponima primenjuje se samo F -transformacija prema obrascima (9) i (11). Pored toga kod simetričnih napona dovoljno je, kao što će se videti, pozabaviti se samo jednim delom periode talasne forme (između dva uzastopna impulsa za paljenje tiristora) - vremenski tok fazora za celu periodu dobija se neposredno iz toga.

(1) Neka su naponi simetričnog trofaznog idealnog invertora

$$(15) \quad \underline{e} = [e_a \ e_b \ e_c]^T$$

dati vremenskim dijagramima na sl. 1a (ovde je

$$(16) \quad \tau = \omega_0 t$$

gde je ω_0 osnovna kružna učestanost napajanja). Ovakav slučaj može nastupiti npr. kada svaku fazu motora napaja po jedan monofazni invertor sa spregom namotaja u zvezdi i izvedenim zajedničkim krajem za sva tri invertora.

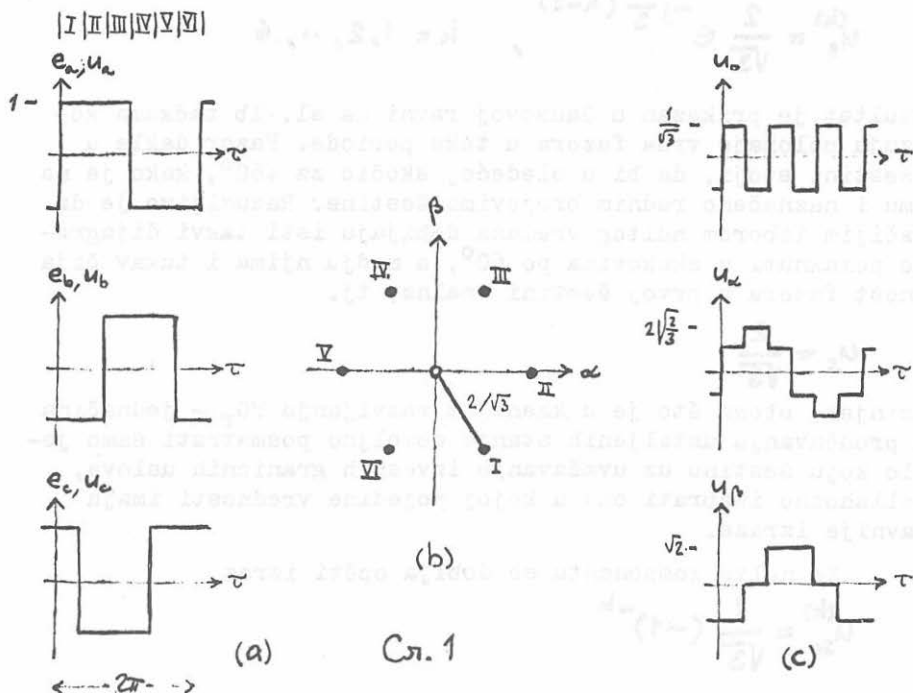
Tada su fazni naponi jednaki invertorskim naponima, tj.

$$(17) \quad \underline{u} = \underline{e}$$

Podelimo periodu na najmanji broj intervala (ovde 6) u kojima se naponi mogu izraziti jednim analitičkim izrazom - kao što je učinjeno na sl. 1a.

U prvoj šestini periode je

$$(18) \quad \underline{e}' = \underline{u}' = [1 \ -1 \ 1]^T$$



Сл. 1

pa se posle F-transformacije dobija

$$(19) \quad \underline{u}' = F_3^T \underline{u}' = \frac{1}{\sqrt{3}} [u_{s0}' \quad u_s' \quad \bar{u}_s']^T = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \quad 2e^{j\frac{\pi}{3}}]^T$$

Traženi fazor je druga komponenta:

$$(20) \quad u_s' = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

(poslednja komponenta u koloni je uvek konjugovana sa drugom, pa je nepotrebna s obzirom da ne donosi nikakve nove informacije).

Zanimljivo je da u ovom slučaju nulta komponenta postoji. Pošto ona ne učestvuje u stvaranju obrtnog polja i momenta ona ima značaja samo pri proračunu stvarnih struja u namotajima i inverterima. Međutim, s obzirom da je raspregnuta odgovarajući proračuni, uz primenu jednostavnih jednačina oblika (f) odn. (g), mogu se izvršiti izdvojeno i naknadno.

Sličnim postupkom dobija se za ma koju, k-u šestinu (n = 6):

$$(21) \quad u_s^{(k)} = u_s^{(k-1)} e^{j\frac{2\pi}{n}} = u_s' e^{j\frac{2\pi}{n}(k-1)}$$

odn.

$$(22) \quad u_s^{(k)} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{3}(k-2)}, \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

Ovaj rezultat je prikazan u Gausovoj ravni na sl. 1b tačkama koje pokazuju položaje vrha fazora u toku periode. Fazor dakle u svakoj šestini stoji, da bi u sledećoj skočio za $+60^\circ$, kako je na dijagramu i naznačeno rednim brojevima šestine. Razumljivo je da se drugačijim izborom nultog vremena dobijaju isti takvi dijagrami, samo pomaknuti u skokovima po 60° , a među njima i takav čija je vrednost fazora u prvoj šestini realna, tj.

$$(23) \quad u_s = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ovo spominjemo stoga što je u kasnijem razvijanju FG_r - jednačina u cilju proučavanja ustaljenih stanja dovoljno posmatrati samo jednu, bilo koju šestinu uz uvažavanje izvesnih graničnih uslova, pa je celishodno izabrati onu u kojoj pojedine vrednosti imaju jednostavnije izraze.

Za nultu komponentu se dobija opšti izraz

$$(24) \quad u_{s0}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1)^{-k}$$

što je prikazano na sl. 1c.

Na sl. 1c prikazani su još vremenski tokovi realne i imaginarne komponente fazora u_s podeljene sa $\sqrt{2}$, označene indeksima α i β ($\alpha\beta$ - komponente^{13,14}). Ove komponente mogu se shvatiti kao naponi ekvivalentne dvopolne dvofazne mašine sa dva međusobno upravna navoja po namotaju. Premda različiti po obliku talasa, oba napona imaju isti prvi harmonik (amplitude $2\sqrt{6}/\pi$) i nijedan nema trećeg harmonika iako ga polazni, trofazni talasi imaju. Zbog trofazne sprege treći harmonik ne učestvuje u stvaranju obrtnog polja i momenta.

(2) Razmotrimo sada slučaj koji je u praksi čest: trofazni mostni inverter napaja namotaje vezane u zvezdu. U tom slučaju invertorski naponi, kao linijski, moraju u svakom trenutku imati zbir nula, što ispunjavaju npr. talasni oblici dati na sl. 2a (e_a, e_b, e_c).

Da bismo primenili FG_r-jednačine moramo najpre naći napone na faznim navojima (u_a, u_b, u_c), što je na prvi pogled neodređen zadatak, jer je u izrazu:

$$(25) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

defeterminanta kvadratne matrice nula. Medjutim, stavljajući

$$(26) \quad u_a + u_b + u_c = v$$

gde v (napon zvezdišta) treba odrediti kasnije i znajući da je

$$(27) \quad e_a + e_b + e_c = 0$$

može se napisati:

$$(28) \quad \begin{bmatrix} e_b \\ e_c \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & -1 \\ -1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix}$$

i posle rešavanja dobiti

$$(29) \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -e_b - 2e_c + v \\ 2e_b + e_c + v \\ -e_b + e_c + v \end{bmatrix}$$

Kada se izvrši transformacija

$$(30) \quad \underline{u} = \underline{F}_s^T \underline{u}$$

dobija se nulta komponenta

$$(31) \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} v$$

i

$$(32) \quad u_s = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha e_b - e_c)$$

Fazor u_s a to znači obrtno polje i momenat, ne zavisi dakle od v , pa ga izuzev radi proračunavanja nulte komponente, ukoliko postoji, i struja u stvarnim namotajima, nije ni potrebno odredjivati. Sem toga, primenom jednačine (f) dobija se kod neizvedenog zvezdišta $v = 0$, pa tada nulte komponente i nema.

Dalje, pošto su talasni oblici invertorskih napona jednaki, ali pomaknuti medjusobno za 120° električnih stepeni, mora biti:

$$(33) \quad \begin{aligned} e_a'' &= -e_b' \\ e_b'' &= -e_c' \\ e_c'' &= -e_a' \end{aligned}$$

pa se, koristeći ove jednakosti i jednakost (27) od izraza (32) napisanog za drugu šestinu periode:

$$(34) \quad u_s'' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha e_b'' - e_c'')$$

može dobiti

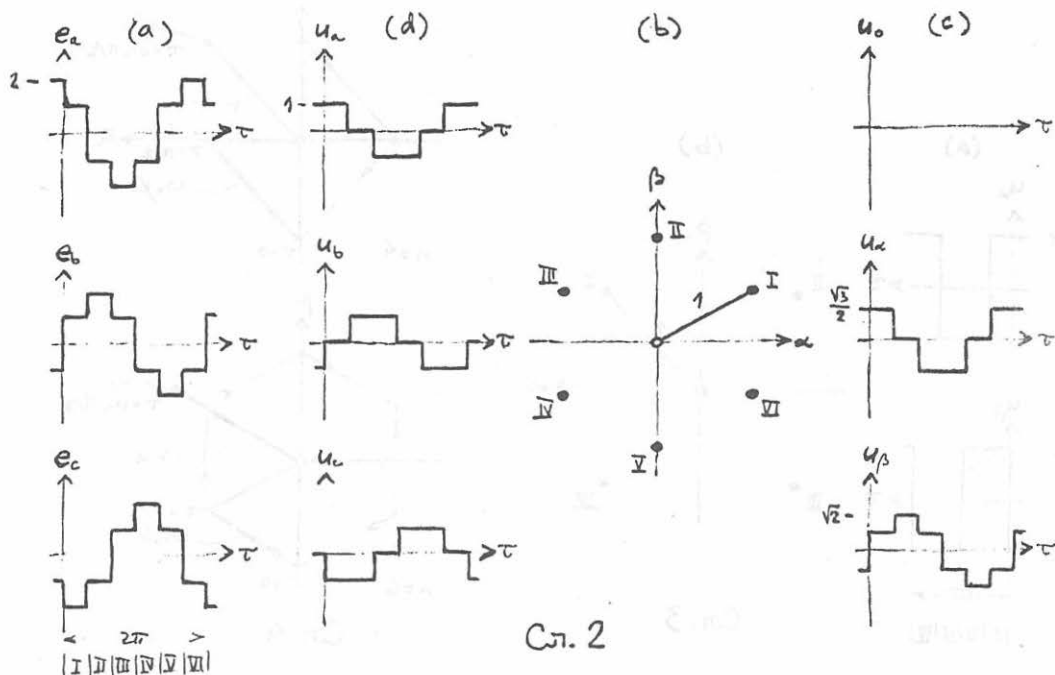
$$(35) \quad u_s'' = -\alpha \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha e_b' - e_c') = u_s' e^{j\frac{\pi}{3}}$$

Na sličan način se može pokazati da za svaku šestinu važi uopšte-obrazac (21) i

$$(36) \quad u_s' = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

uz $n = 6$. Tako je čak i bez potpunog poznavanja talasnog oblika (dovoljne su vrednosti dvaju invertorskih napona u jednoj šestini) fazor u_s odredjen.

Na sličan način kao u prethodnom slučaju rezultati su sredjeni na sl. 2, s tim što su pored invertorskih napona dati i



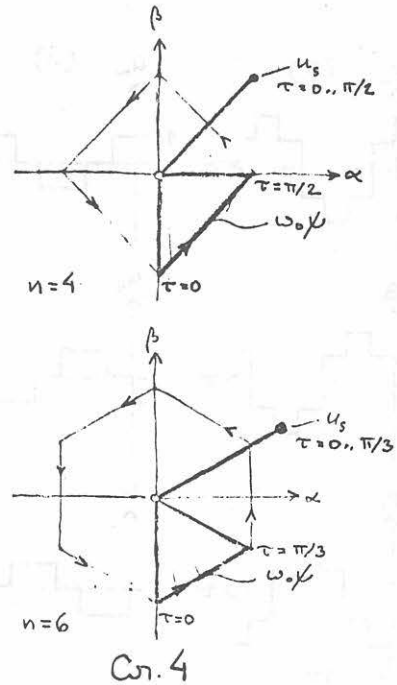
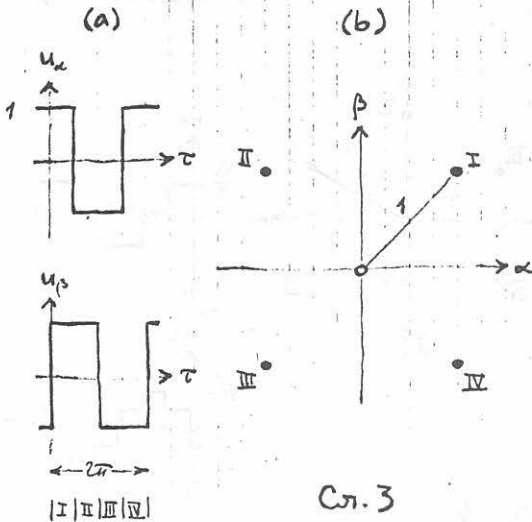
naponi na faznim navojima motora (sl. 2d). Sa sl. 2c se uočava da je α -komponenta (u_{α}), tj. realni deo fazora u_s , proporcionalan naponu prve faze (u_a). Može se pokazati da to važi uvek kada nema nulte komponente. Koristeći ovaj fakat može se skratiti put nalaženja transformisanih veličina i obrnuto.

(3) U istoj šemi kao u prethodnom slučaju (namotaj motora u zvezdi) neka su talasni oblici invertorskog napona kao na sl. 2d, ali sa amplitudom $\sqrt{3}$. Primenom obrasca (32) dobija se u prvoj šestini

$$(37) \quad u_s' = 1$$

Fazorski dijagram je sličan onome na sl. 1b, samo pomaknut u pozitivnom smeru za šestinu periode. Naponi na navojima su kao oni na sl. 2a, samo pomaknuti za šestinu periode unazad i imaju amplitudu $2/\sqrt{3}$.

(4) Ako je namotaj motora vezan u trougao dobija se u slučaju talasnih oblika prema sl. 2a dijagram tipa kao na sl. 1b, a ako su oblici prema sl. 2d kao na sl. 2b.



(5) Kada se analogna analiza sprovede za slučaj dvofaznog motora sa dvofaznim invertorom dobijaju se rezultati prikazani na sl. 3. Izraz za fazor napona je kao u (36):

$$(38) \quad u_s^i = e^{j\frac{\pi}{n}}$$

uz $n = 4$.

(6) Jedna uopštena analiza za ma koji broj faza i za bilo kakvu spregu motora i višefaznog običnog invertora pokazuje da postoje dva tipa fazora faznog napona sa opštim izrazima

$$(39) \quad u_s^i = U$$

(fazorski dijagram tipa kao na sl. 1b, a talasni oblik zaravnjen kao na sl. 2d), odn.

$$(40) \quad u_s^i = U e^{j\frac{\pi}{n}}$$

(fazorski dijagram tipa kao na sl. 2b, a talasni oblik stepenast kao na sl. 2a), gde je n broj pulseva u periodi. U oba slučaja je za ma koji, k -i deo intervala:

$$(40a) \quad u_s^{(k)} = u_s^i e^{j\frac{2\pi}{n}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

3. DIREKTNÓ IZRAČUNAVANJE FLUKSOVA, STRUJA I MOMENTA U NEHARMONIČNOM STACIONARNOM STANJU

Jednačine (a)..(g) su opšte u tom smislu što obuhvataju i prelazna stanja. U primeni kod stacionarnih stanja pobudjenih neharmoničnim stepenastim višefaznim funkcijama (kvazistacionarnih stanja) mogu se uočiti izvesne osobenosti koje uprošćavaju analizu i omogućavaju razradu jedne metodike koja se čini konkurentnom više uobičajenom postupku harmonske analize.

Prepuštajući izlaganje opštijeg karaktera drugoj prilici prikazaćemo postupak na primeru sračunavanja pulsacija obrtnog momenta, koristeći se nešto uprošćenim polaznim jednačinama.

Ako se naime zanemare statorski padovi napona namesto jednačina (a) i (b) imamo jednostavno:

$$(a') \quad \frac{d\psi}{dt} = u_s$$

$$(b') \quad \Lambda_r \frac{di_r}{dt} + (R_r - j\omega\Lambda_r)i_r = -(u_s - j\omega\psi)$$

pa se ψ i i_r mogu direktno sračunati i staviti u jednačinu momenta

$$(e) \quad m_e = n j (i_r \bar{\psi} - \bar{i}_r \psi)$$

Statorska struja se u slučaju potrebe može neposredno dobiti iz (c) ili, uz zanemarenje $\Lambda_r \ll M$ (što je sasvim prihvatljivo kod asinhronih motora), iz jednačine

$$(c') \quad \Lambda_r \frac{di_s}{dt} + (R_r - j\omega\Lambda_r)i_s = u_s - j\omega\psi + \frac{R_r}{M}\psi$$

u kojoj se kod malih klizanja i kada nema rotorskog otpornika može i treći član s desne strane zanemariti.

U praktičnijoj, jediničnoj formi ove jednačine glase:

$$(a'') \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = u$$

$$(b'') \quad \frac{dy_r}{dt} + [\sigma - j(1-s)]y_r = x$$

$$x = u - j(1-s)\varphi$$

$$(c'') \quad \frac{dy_s}{dt} + [\sigma - j(1-s)]y_s = x_s$$

$$x_s = u + [\rho - j(1-s)]\varphi$$

gde je

$$\tau = \omega_0 t$$

$$u = u_s / U$$

$$\varphi = \omega_0 \psi / U$$

$$y_r = -\omega_0 \Lambda_r i_r / U$$

$$y_s = \omega_0 \Lambda_r i_s / U$$

$$\sigma = R_r / \omega_0 \Lambda_r$$

$$\rho = R_r / \omega_0 M$$

$$s = 1 - (\omega / \omega_0)$$

Rešavaćemo ove jednačine u najopštijem slučaju bilo kojeg broja faza koristeći se izrazom za napon u prvom intervalu

$$(41) \quad u = e^{j\frac{\pi}{n}}$$

izvedenim iz izraza (40).

Fluks u prvom intervalu se dobija direktnim integralom jednačine (a'') u toku tog intervala:

$$(42) \quad \varphi = \int_0^{\tau} u d\tau + \varphi(0), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{2\pi}{n}$$

pa je jedini problem odrediti početnu vrednost $\varphi(0)$. Iako je u prekidna funkcija vremena u toku periode, ona je svuda definisana i ograničena, pa φ mora, kao integral biti kontinualna funkcija. Iz toga sledi uslov kontinuiteta:

$$(43) \quad \varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \varphi(0)$$

gde su sa $\varphi''(\tau)$ označene vrednosti fazora fluksa u sledećem, drugom intervalu kao funkcija od τ (koje se ponovo meri od nule S druge strane u ustaljenom stanju mora biti

$$(44) \quad \varphi''(\tau) = \varphi(\tau) e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

(uslov simetričnosti), pa se iz

$$(45) \quad \varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \varphi(0) e^{j\frac{2\pi}{n}}$$

određuje $\varphi(0)$.

Posle sračunavanja dobija se za prvi interval:

$$(46) \quad \varphi = u \left[\tau - \frac{\pi}{n} - j \frac{\pi}{n} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} \right]$$

ili, uz korišćenje izraza (41):

$$(47) \quad \varphi_{\alpha} = \sqrt{2} \tau \cos \frac{\pi}{n}$$

$$(48) \quad \varphi_{\beta} = \sqrt{2} \left(\tau - \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \right) \sin \frac{\pi}{n}$$

U svakom k-om intervalu je

$$(49) \quad \varphi^{(k)} = \varphi e^{j \frac{2\pi}{n} (k-1)}$$

Na slici 4 prikazane su ove funkcije u Gausovoj ravni za dvofazni i trofazni sistem ($n = 4$ i 6). Polarni poteg do tačke koja predstavlja trenutnu vrednost funkcije ide neravnomernom ugaonom brzinom sa vrhom na poligonu (u sredini stranice brže nego na krajevima), koji se sa povećanjem broja faza sve više približava krugu (slučaj harmoničnog napajanja). Uz ove dijagrame je zgodno napomenuti da polarni poteg svojim smerom i dužinom predstavlja smer i intenzitet obrtnog fluksa u međjugvoždju mašine ako se ravan dijagrama postavi u poprečni presek mašine sa centrom u centru vratila, i osom α u osi referentnog navoja statora (fizički vektor).

Sledeći korak je u proračunavanju fazora x , odn. x_S . Opšti izraz u prvom intervalu za x , dobijen korišćenjem prethodnih izraza i uz upotrebu uslova kontinuiteta i uslova simetričnosti, glasi:

$$(50) \quad x(\tau) = \cos \frac{\pi}{n} + (1-s) \left(\tau - \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \right) \sin \frac{\pi}{n} + \\ + j \left[\sin \frac{\pi}{n} - (1-s) \tau \cos \frac{\pi}{n} \right]$$

Ovaj fazor, zajedno sa svojim α - i β -komponentama, prikazan je grafički na sl. 5a i 5b za slučajeve $n = 6$ i 12 i $s = 0,10$. Za $s=1$ on se poklapa sa fazorom napona. Premda mu se teško može pripisati fizičko značenje, ovaj fazor je značajan,

jer predstavlja pobudnu funkciju diferencijalne jednačine rotorske struje (b"). Izraz za x_s (pobudna funkcija za statorsku struju - jedn. c") nešto je složeniji i može se shvatiti kao uopšten izraz, jer se stavljanjem $\varphi = 0$ dobija x . Međutim, on nije neophodan za proračunavanje momenta.

Diferencijalna jednačina (b") je linearna, prvog reda, kompleksna. Njeno rešenje za prvi interval može se dobiti npr. primenom Laplasove transformacije i ono glasi

$$(51) \quad ay_r = \left[ay_{r0} - \left(x_0 - \frac{\Delta x}{a} \right) \right] e^{-a\tau} + \Delta x \tau + \left(x_0 - \frac{\Delta x}{a} \right)$$

gde su

$$(52) \quad \begin{aligned} a &= \sigma - j(1-s) \\ x_0 &= x(0) \\ \Delta x &= \frac{n}{2\pi} \left[x\left(\frac{2\pi}{n}\right) - x(0) \right] \\ y_{r0} &= y(0) \end{aligned}$$

Izraz za početnu vrednost jedinične vrednosti struje, dobijen korišćenjem uslova kontinuiteta i simetričnosti (analogno izrazima (43)..(45)) glasi

$$(53) \quad ay_{r0} = \frac{(1-\varepsilon)\left(x_0 + \frac{\Delta x}{a}\right) - \Delta x \frac{2\pi}{n}}{j - \varepsilon}$$

gde je radi skraćenja uvedeno

$$(54) \quad \varepsilon = e^{-a \frac{2\pi}{n}}$$

Izraz za momenat u funkciji vremena (pulsacije) najlakše se dobija ako se izrazi (46) i (51) napišu u formi:

$$(55) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\alpha + j\varphi_\beta)$$

$$(56) \quad y_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (y_{r\alpha} + j y_{r\beta})$$

pa se izraz (e) pretvara u

$$(e') \quad m_e = n (i_{r\alpha} \psi_\beta - i_{r\beta} \psi_\alpha)$$

odn. u jediničnoj formi:

$$(e'') \quad m = y_{rp} \varphi_\alpha - y_{rx} \varphi_\beta$$

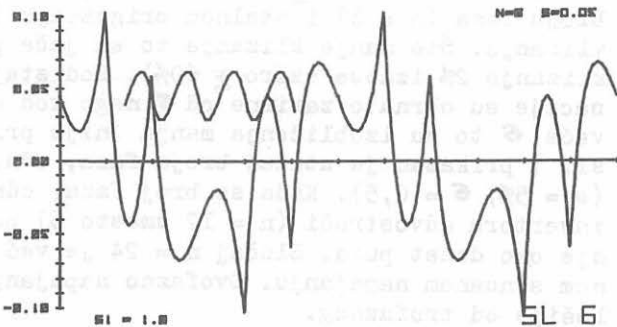
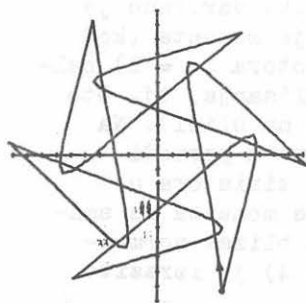
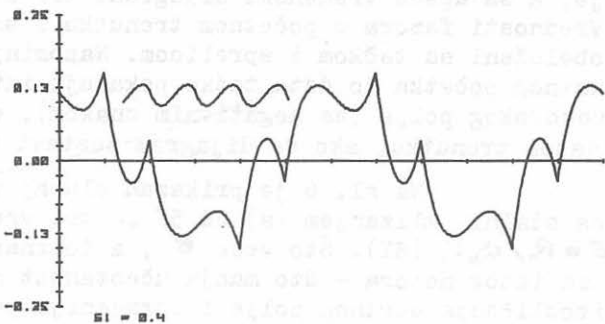
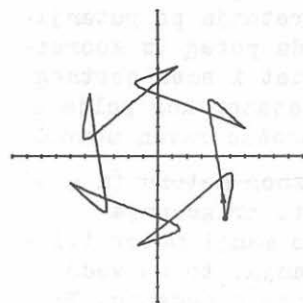
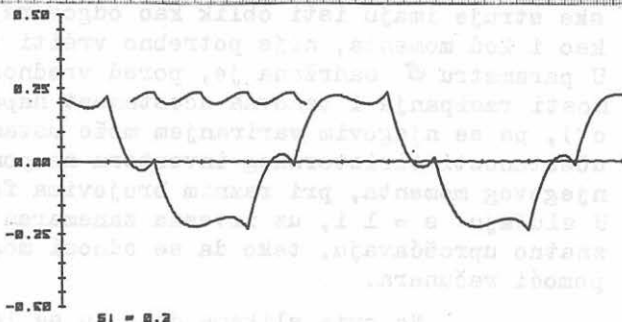
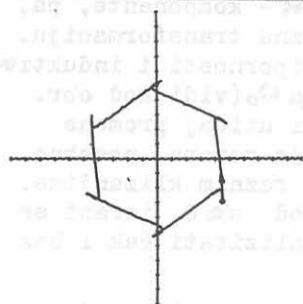
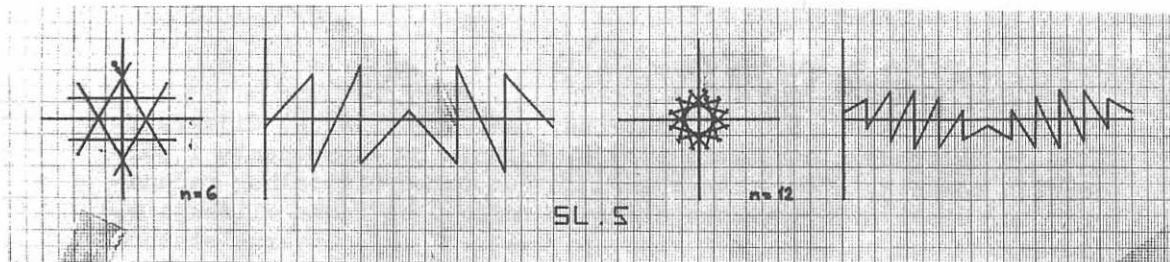
gde je

$$m = m_e \omega_0^2 \lambda_r / U^2 n$$

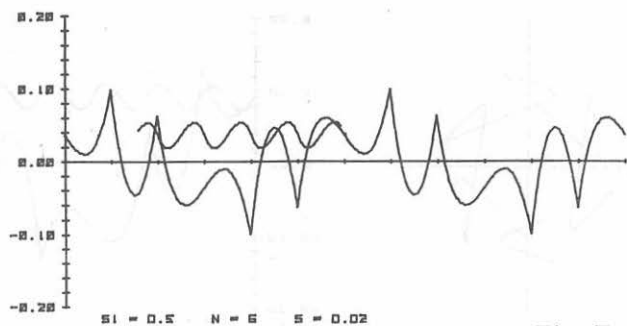
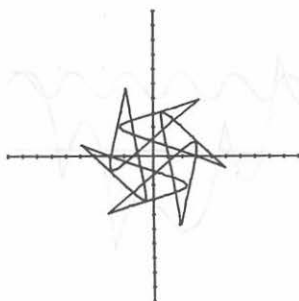
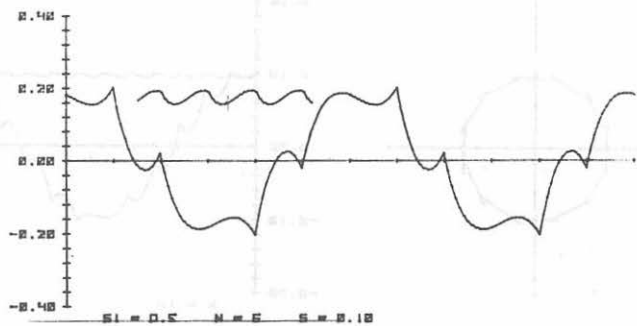
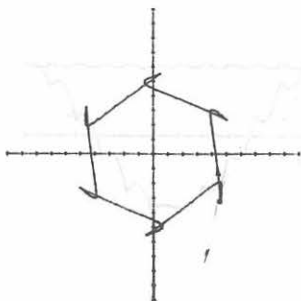
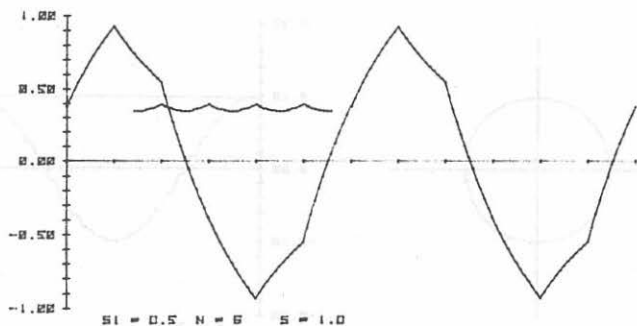
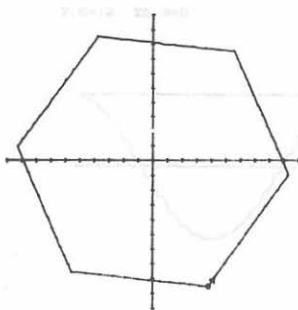
Na sl. 6, 7 i 8 dati su, radi ilustracije, dijagrami fazora rotorske i statorske struje, njihove α -komponente i pulsacije momenta, što je sve sračunato (uz pomoć digitalnog računara) koristeći ovde izvedene direktne izraze, za razna klizanja s , različit broj pulseva n i razne parametre σ i φ . Stvarne statorske struje imaju isti oblik kao odgovarajuće α -komponente, pa, kao i kod momenta, nije potrebno vršiti inverznu transformaciju. U parametru σ sadržana je, pored vrednosti otpornosti i induktivnosti rasipanja i osnovna učestanost napajanja ω_0 (vidi kod obr. c"), pa se njegovim variranjem može ustanoviti uticaj promene učestanosti tiristorskog invertora na ponašanje motora, posebno njegovog momenta, pri raznim brojevima faza i raznim klizanjima. U slučaju $s = 1$ i, uz izvesna zanemarenja, kod $s \approx 0$, izrazi se znatno uprošćavaju, tako da se odnosi mogu analizirati čak i bez pomoći računara.

Na ovim slikama date su sa leve strane putanje fazora (negativne) rotorske (vrlo približno i pozitivne statorske) struje, a sa desne vremenski dijagrami tih istih struja i momenta. Vrednosti fazora u početnom trenutku i smer kretanja po putanji obeleženi su tačkom i sprelicom. Napominjemo da poteg iz koordinatnog početka do date tačke pokazuje intenzitet i smer obrtnog rotorskog polja (sa negativnim znakom), odn. statorskog polja u datom trenutku, ako se dijagram postavi u poprečnu ravan motora.

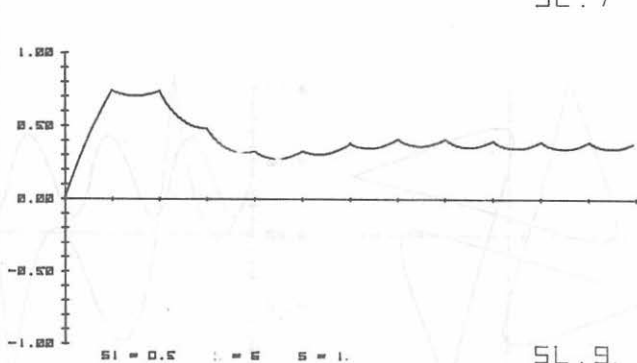
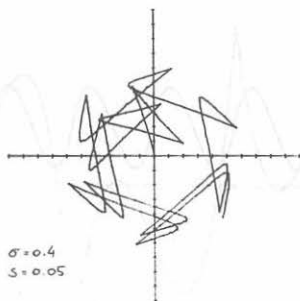
Na sl. 6 je prikazan slučaj trofaznog motora ($n = 6$) sa stalnim klizanjem (s) od 5% za tri vrednosti prigušenja $\sigma = R/\omega_0 L$ (SI). Što veće σ , a to znači što manji motor ili - kod istog motora - što manja učestanost napajanja, to su veća izobličenja obrtnog polja i izraženije pulsacije u momentu. Pri $\sigma = 1$ iznose blizu $\pm 40\%$ od srednjeg momenta. Na sl. 7 pri istom broju faza ($n = 6$) i stalnom prigušenju ($\sigma = 0,5$) varirano je klizanje. Što manje klizanje to su jače pulsacije momenta (kod klizanja 2% iznose skoro $\pm 60\%$). Kod stajaćeg rotora ($s = 1$) pulsacije su obrnuto zavisne od σ nego kod malih klizanja, tj. što veće σ to su izobličenja manja (nije prikazano na slici). Na sl. 7 prikazan je uticaj broja faza, odn. pulseva u periodu ($s = 5\%$, $\sigma = 0,5$). Kada se broj faza, odn. broj tiristora u invertoru udvostruči ($n = 12$ umesto 6) pulsacije momenta se smanje oko deset puta. Slučaj $n = 24$ je već sasvim blizak normalnom sinusnom napajanju. Dvofazno napajanje ($n = 4$) je izrazito lošije od trofaznog.



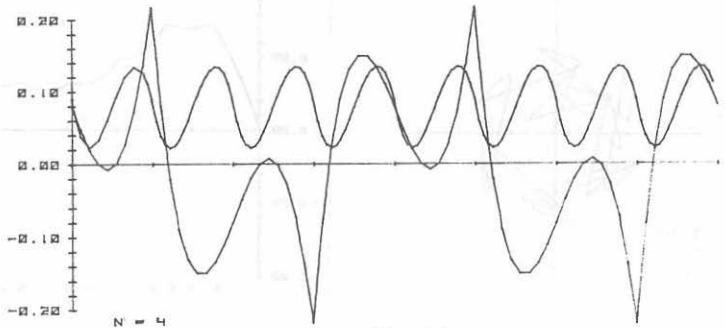
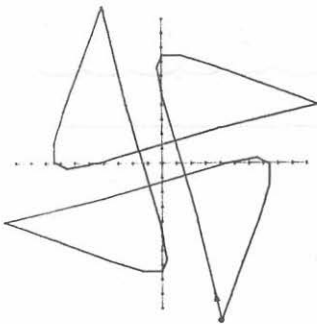
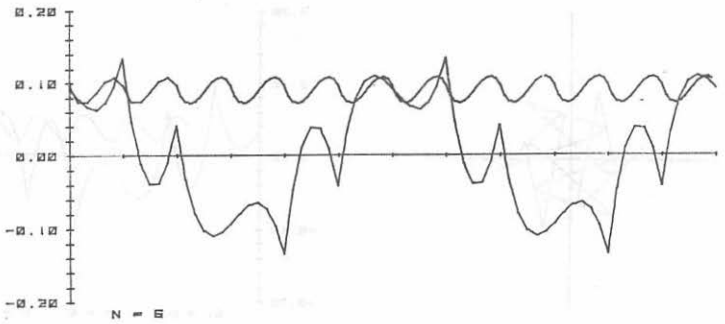
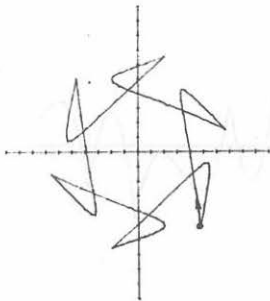
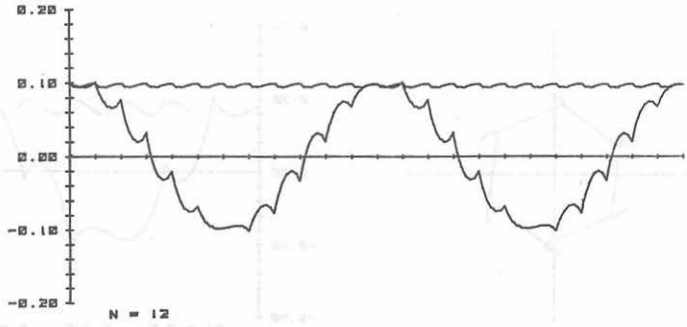
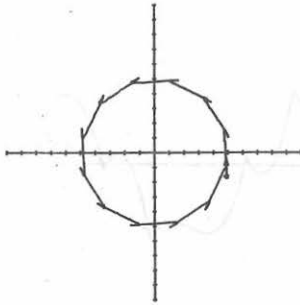
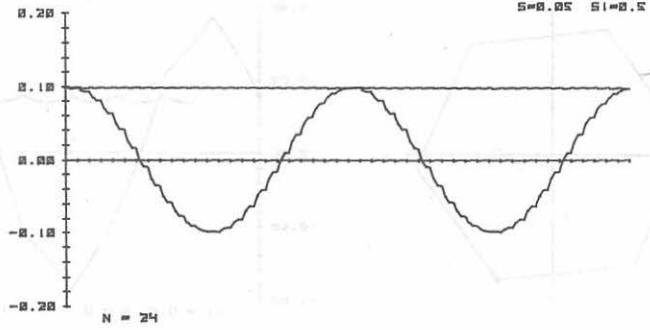
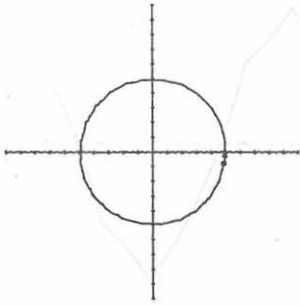
SL 6



SL . 7



SL . 9.



SL. 6

4. SRAČUNAVANJE FLUKSOVA, STRUJA I MOMENTA U NEHARMONIČNOM TRANZIJENTNOM I STACIONARNOM STANJU METODOM KORAK-PO-KORAK

Jednačine (a)..(g) mogu se rešavati uz pomoć jedne od standardnih metoda za koračno rešavanje diferencijalnih jednačina na digitalnom računaru i to u najopštijem slučaju prelaznih stanja bez zanemarivanja učinjenih na početku odeljka 3 i čak uz promenljivu brzinu. Ipak direktna metoda izložena dovde ima znatnu prednost zbog daleko veće brzine dobijanja rezultata na računaru i mogućnosti fizičkog predočavanja pojava.

Radi mogućnosti rešavanja i prelaznih stanja razrađen je i program (na jeziku BASIC) koji polazi od opštih jednačina (a)..(e) prebačenih u formu vektorskog prostora stanja (state-space) sa naponom kao veličinom upravljanja i pomoću koračne metode Runge-Kute (četvrti red) daje grafike fluksova, struja i momenata u funkciji vremena. Program je, kao uostalom i metoda izložena u odeljku 3, opšti i u tom smislu što obuvata sve veličine, tipove i režime asinhronih motora (bez napajanja ili prekidanja u rotorskom kolu) i sve tipove invertora, sa proizvoljnim brojem faza, sve naravno pod pretpostavkama iznetim na početku članka i pod uslovom da se fazorska funkcija napona može svesti na zvezdastu formu tipa kao na sl. 3b ili 2b. Ako je pak fazor napona drugačijeg tipa (npr. kod invertora sa modulacijom širine talasa) metoda i programi se prilagođavaju samo na jednom mestu: kod definisanja fazora napona, odn. pobudne funkcije x . Na sličan način i uz odgovarajuće prednosti polazne jednačine se mogu upotrebiti i za slučajeve strujnog pobudjivanja. Na sl. 9 su, samo radi ilustracije tipičnih oblika, odabrana dva dijagrama koji prikazuju uspostavljanja struje i momenta posle uključenja invertora.

5. REFERENCE

1. Steady State Analysis of Thyristor Controlled Three Phase Induction Motors Using State Space Techniques (B. Illango and M. Ramamoorthy), IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, July/August 1974, p. 1165.

2. Induction Machine Analysis for Arbitrary Displacement Between Multiple Winding Seps (R. H. Nelson and P. C. Krause), IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, May/June 1974, p. 841.

3. Analysis and Simplified Representation of a Rectifier-Inverter Induction Motor Drive, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, May 1969, p. 588.

4. Trofazni inverter promenljive učestanosti za napajanje asinhronih motora sa širokim opsegom brzina, (Djordje Kalić), Energetska elektronika, Zbornik radova sa I Savetovanja u Beogradu, 1973, str. 135.

5. Primena trofaznih (Parkovih) vektora za analizu strujnih kola sa tiristorima (I. Rácz), Energetska elektronika, Zbornik radova sa I Savetovanja u Beogradu, 1973, str. 153.

6. Transient Analysis of Rotating Machines and Stationary Networks by Means of Rotating Frames (Y. H. Ku), Trans. AIEE, 1951, p. 943.

7. Prikazivanje rada mašine za naizmeničnu struju na modelu (V. Vučković), Doktorska disertacija na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, 1964.

8. Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks (C. L. Fortescue), Trans. AIEE, 1918, pp. 1027-1140.

9. Transient Analysis of Alternating - Current Machinery (W. V. Lyon), New York, 1954.

10. Normierte Komponentensysteme zur Behandlung von Unsymmetrieaufgaben in Drehstrom und Zweiphasennetzen (H. Edelmann), Arch. f. Elektrotechnik, 1956, s. 318.

11. Prelazni procesi u električnim mašinama (V. Vučković), Kurs na postdiplomskim studijama na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

12. Electromechanical Energy Conversion (D. C. White and H. H. Woodson), New York, 1959.

13. Circuit Analysis of A-C Power Systems (Edith Clarke), New York, 1943.

14. Two-Phase Coordinates of a Three-Phase Circuit (E. Kimbark), Trans. AIEE, 1939, p. 894.