



# GRANICE TAČNOSTI STOHAISTIČKOG MERNOG INSTRUMENTA PRI NISKOM SNR

Branislav Santrač, Vladimir Vujičić \*

Visoka tehnička škola, Novi Sad, Srbija

\*Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Srbija

**Sadržaj:** U radu se izvodi teorijska granica merne nesigurnosti stohastičke metode za proizvoljnu ortogonalnu transformaciju, realan AD konvertor i proizvoljan šum, kada se meri signal u šumu. U telekomunikacijama je to poznati klasični problem određivanja Kramer-Rao granice kod estimacije signala u šumu. U klasičnom problemu je AD konvertor idealan, ortogonalna transformacija je Furijeova, a šum Gausov. Korišćen je originalni matematički pristup koji dovodi do formule za granicu. Formula je opštija od Kramer-Rao granice i u radu se pokazuje da je Kramer-Rao granica njen specijalni slučaj. Diskutuju se i praktični aspekti primene stohastičke metode u skladu sa nađenom granicom merne nesigurnosti.

**Key Words:** Stohastička merenja/Merenje harmonika / Šum/CRLB

## 1. UVOD

Još 1956. g. [1] je pokazana mogućnost realizacije pouzdanog instrumenta od nepouzdanih komponenti. U [2] je pokazano da dodavanje slučajnog uniformnog šuma na ulaz A/D konvertora raspreže mernu grešku od ulaznog signala. Ovaj pristup [3] se može koristiti i u projektovanju i realizaciji jednostavnih neuronskih mreža. U [4] je pokazano da se korišćenjem slučajnog uniformnog ditera može realizovati instrument za merenje prave efektivne vrednosti, koji ima mogućnost povećanja tačnosti sa smanjivanjem brzine merenja i obratno. Merna nesigurnost takvog instrumenta može biti čak do 62 ppm (part per million) za merenja snage [5] u trajanju od 4,5 sati. Sve to može biti postignuto sa vrlo jednostavnim hardverom.

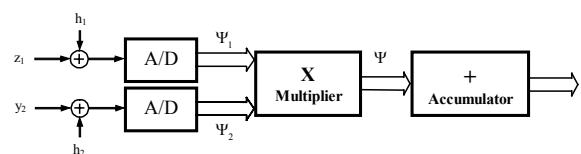
Međutim, takav instrument [4], [5] nije pogodan da bude kalibrator ili merilo vrlo brzih promena signala. To je razlog zbog čega je izvršena generalizacija [6]. Ta generalizacija ne obuhvata uticaj šuma na merenja, što se može tolerisati u kalibracionim merenjima, ali ne i u ON-LINE merenjima. Uticaj šuma u merenjima u distributivnoj mreži se vidi u [7]. Analiza je obavljena pri nivou SNR=17 dB. To je najviši nivo šuma koji su autori našli u literaturi, a da se šum egzaktno tretira kao uticajna veličina. U radu su prikazane simulacije bez

njihove teorijske analize. Dobijeni rezultati pokazuju da metoda u četiri sekunde daje harmonike sa tačnošću od približno 0,5 %.

Rad je posvećen teorijskoj analizi uticaja šuma na merenje harmonika pomoću generalizovane metode. Generalizovan instrument je realizovan kao stohastičko merilo harmonika [8].

Evropska norma EN50160 kaže da vrednost THD-a na mreži može biti maksimalno 8%. Zbog toga se mrežni napon ne može više tretirati kao prostoperiodičan. Prisustvo viših harmonika u mreži (napona ili struje), eliminiše neke metode koje su bile pogodne za prostoperiodične signale. Šta više, merni transformatori sa jezgrom su nelinearni, pa samim tim nepogodni za merenja u takvim izobličenim režimima. Izlaz iz situacije je u primeni linearnih senzora struje i napona. Strujni merni trafo bez jezgra je takav uređaj.

## 2. INSTRUMENT



Sl.1 Blok dijagram instrumenta za merenje zašumljenih signala

Na Slici 1. je prikazana šema instrumenta. Ditterski signali [2]  $h_1$  and  $h_2$  su slučajni, uniformni, međusobno nekorelisani i zadovoljavaju:

$$0 \leq |h_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}$$

$$p(h_i) = \frac{1}{\Delta_i} \quad (i = 1, 2),$$

gde su  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  kvanti uniformnog kvantizera, a  $p(h_i)$  je pripadajuća gustina raspodele verovatnoće od  $h_i$ . Ulazni signali su  $z_1 = y_1 + n$ ,  $y_1 = f_1(t)$ ,  $n$  je šum i  $y_2 = f_2(t)$ . Ako su  $y_1 = f_1(t)$  i  $y_2 = f_2(t)$  integrabilne funkcije vremena, a  $n$  šum sa raspedlom gustine

verovatnoće  $p(n)$ , tada je očekivana vrednost izlaza,  $\bar{\Psi}$ , tokom vremena  $t \in [t_1, t_2]$ , data sa

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + \int_{-R}^R n p(n) dn \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt \quad (2)$$

a merna greška je ograničena sa (3)

$$\sigma_e^2 \leq \frac{\sigma_s^2}{N} \quad (3)$$

$$\sigma_s^2 \approx \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt, \text{ za } \Delta_1^2 \gg \Delta_2^2$$

gde je  $N$  broj uzoraka u vremenskom intervalu  $(t_2 - t_1)$ , a  $\Delta_1$  je kvant A/D konvertora na kanalu 1, a  $e = \Psi - z_1 \cdot y_2$  je greška pojedinačnog merenja.

Za  $\bar{n} = \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn = 0$ , što je inače slučaj,

gornja granica relativne greške  $\Gamma_u$  u merenju

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \text{ je data sa (3a).}$$

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_r^2}}{\bar{\Psi}} \leq \frac{\frac{\sigma_s}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}}{\bar{\Psi}} = \Gamma_u \quad (3a)$$

Treba primetiti da, pored ditera, koji je pseudoslučajni proces, A/D konverzija kao deterministički proces dominira u funkcionisanju instrumenta.

### 2.1. DC ulazi

Posmatrajmo izlaze jednog od dva A/D konvertora, npr.  $\Psi_1$ . Neka je  $z_1 = \text{const} = m\Delta_1 + |\delta\Delta_1|$  pripadajući ulazni napon između  $m\Delta_1$  i  $(m+1)\Delta_1$ , i na rastojanju  $|\delta\Delta_1| \leq \frac{\Delta_1}{2}$  od najbližeg kvantnog nivoa  $m\Delta_1$ . Očigledno je da  $\Psi_1 \in \{m\Delta_1, (m+1)\Delta_1\}$ , a relacija (4) se može lako dokazati pomoću jednostavog geometrijskog zaključivanja.

$$\bar{\Psi}_1 = m\Delta_1 + |\delta\Delta_1| = z_1, \quad (4)$$

gde je  $\bar{\Psi}_1$  srednja vrednost od  $\Psi_1$ .

Analogno tome, za  $y_2 = \text{const}$ ,

$$\bar{\Psi}_2 = y_2. \quad (5)$$

Pripadajuća varijansa je

$$\sigma_1^2 = |\delta\Delta_1| \cdot (\Delta_1 - |\delta\Delta_1|) = \bar{\Psi}_1^2 - z_1^2 \leq \frac{\Delta_1^2}{4} \quad (6)$$

$$\sigma_2^2 = |\delta\Delta_2| \cdot (\Delta_2 - |\delta\Delta_2|) = \bar{\Psi}_2^2 - y_2^2 \leq \frac{\Delta_2^2}{4} \quad (7)$$

### 2.2 Nesinusoidalni ulazi

Neka su  $z_1 = f_1(t) + n$  i  $y_2 = f_2(t)$  ulazni signali uređaja sa Slike 1.

$$|z_1| \leq R, |y_2| \leq R \quad (8)$$

$R$  je opseg oba AD konvertora,  $y_1 = f_1(t)$  i  $y_2 = f_2(t)$  su integrabilne funkcije vremena, a  $n$  je šum sa gustinom raspodele verovatnoće  $p(n)$ .

Iz [4] se vidi da vreme  $t$ , unutar intervala  $[t_1, t_2]$  može biti posmatrano, sa stanovišta očekivanja, i kao deterministička, i kao stohastička promenljiva sa uniformnom gustinom raspodele  $p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}$ . U oba slučaja rezultat je isti.

**Teorema 1:** Očekivana vrednost izlaznog signala digitalnog množača sa Slike 1. i intervalu  $t \in \{t_1, t_2\}$ ,  $\bar{\Psi}$ , je data sa

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + \int_{-R}^R n p(n) dn \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt$$

**Dokaz 1:** U opštem slučaju, očekivana vrednost je definisana kao

$$\bar{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi dP_{\Psi} \quad (9)$$

i

$$dP_{\Psi} = dP_{y_1} \cdot dP_{y_2} \cdot dP_n \cdot dP_{h_1} \cdot dP_{h_2}$$

Pošto su  $y_1$  i  $y_2$  zavisne od vremena  $t$ ,

$$dP_{\Psi} = dP_{y_1/t} \cdot dP_{y_2/t} \cdot dP_t \cdot dP_n \cdot dP_{h_1} \cdot dP_{h_2}$$

i takođe

$$dP_{\Psi} = p(y_1/t) \cdot p(y_2/t) \cdot p(t) \cdot p(n) \cdot p(h_1) \cdot p(h_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \cdot dt \cdot dn \cdot dh_1 \cdot dh_2 \quad (12)$$

Može se lako dokazati [4] da je  $p(y_i/t) = \delta[y_i - f_i(t)]$ ,  $p(h_i) = \frac{1}{\Delta_i}$ ,  $(i=1,2)$ ,

$$p(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}, \text{ pa (9)}$$

postaje

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \int_{-R}^R \delta[y_1 - f_1(t)] dy_1 \cdot \int_{-R}^R \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 \cdot \int_{-R}^R p(n) dn \cdot \int_{-\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \Psi_1 \frac{dh_1}{\Delta_1} \cdot \int_{-\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \Psi_2 \frac{dh_2}{\Delta_2} \quad (13)$$

jer je  $\Psi = \Psi_1 \cdot \Psi_2$ .

$\delta$  je Dirakova  $\delta$  funkcija.

Na osnovu (4) i (5) sledi da je

$$\int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \Psi_1 \cdot \frac{dh_1}{\Delta_1} = y_1 + n \quad (14)$$

$$\int_{\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \Psi_2 \cdot \frac{dh_2}{\Delta_2} = y_2$$

pa je

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \int_{-R}^R y_1 \cdot \delta[y_1 - f_1(t)] dy_1 \cdot \int_{-R}^R y_2 \cdot \delta[y_2 - f_2(t)] \cdot dy_2 \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \int_{-R}^R y_2 \cdot \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 \quad (15)$$

i konačno,

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt$$

što je i dokaz teoreme.

Treba napomenuti da je  $t$  deterministička promenljiva.

**Teorema 2:** Varijansa na izlazu množača  $\sigma_{\Psi}^2$  zadovoljava

$$\sigma_{\Psi}^2 \leq \frac{\Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2}{16} + \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt + \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) dt \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn + \frac{\Delta_2^2}{4} \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn + \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2^2(t) dt + \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn - \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn \right]^2 = \sigma_u^2$$

**Dokaz 2:** Varijansa je definisana [4] kao

$$\sigma_{\Psi}^2 = \overline{(\Psi - \bar{\Psi})^2} = \bar{\Psi}^2 - \bar{\Psi}^2. \quad (16)$$

Iz (9) i (12) sledi da je

$$\bar{\Psi}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \int_{-R}^R \delta[y_1 - f_1(t)] dy_1 \cdot \int_{-R}^R \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 \cdot \int_{-R}^R p(n) dn \cdot \int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \Psi_1^2 \frac{dh_1}{\Delta_1} \cdot \int_{\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \Psi_2^2 \frac{dh_2}{\Delta_2} \quad (17)$$

Na osnovu (6) i (7) dobijamo da je

$$\int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \Psi_1^2 \frac{dh_1}{\Delta_1} \leq \frac{\Delta_1^2}{4} + z_1^2 = \frac{\Delta_1^2}{4} + (y_1 + n)^2 \quad (18)$$

$$\int_{\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \Psi_2^2 \frac{dh_2}{\Delta_2} \leq \frac{\Delta_2^2}{4} + y_2^2$$

Uzimajući u obzir (17) i (18) dobija se

$$\bar{\Psi}^2 \leq \frac{\Delta_1^2 \cdot \Delta_2^2}{16} + \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt + \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) dt \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn + \frac{\Delta_2^2}{4} \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn + \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) dt + \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn \quad (19)$$

Koristeći teoremu 1, (16) i (19) dokaz teoreme 2 možemo završiti.

Ako je  $\bar{n} = \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn = 0$  i  $\Delta_1^2 \gg \Delta_2^2$ , tada je

$$\sigma_u^2 \approx \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) dt - \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \right]^2 + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn \quad (19a)$$

**Teorema 2** definiše gornju granicu  $\sigma_u^2$  od  $\sigma_\Psi^2$ . Vidi se da ona ima tri dela:

$$\sigma_u^2 = \sigma_s^2 + \sigma_d^2 + \sigma_r^2 \quad (20)$$

gde

$$\sigma_s^2 \approx \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \quad (20a)$$

predstavlja gornju granicu varijanse merne greške  $e$  definisane sa  $e = \Psi_1 \cdot \Psi_2 - (y_1 + n) \cdot y_2$

Takođe

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) dt - \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt \right]^2 \quad (21)$$

$\sigma_d^2$  je varijansa proizvoda  $y_1 \cdot y_2$ , a

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \cdot \int_{-R}^R n^2 \cdot p(n) dn \quad (22)$$

je varijansa veličine  $r = n \cdot y_2$ .

**Teorema 3:** Gornja granica relativne preciznosti metode,  $\Gamma_u$ , je definisana sa:

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_r^2}}{\bar{\Psi}} \leq \frac{\sigma_s}{\bar{\Psi}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}}{\bar{\Psi}} = \Gamma_u$$

**Dokaz 3:** U [6] je dokazano da je  $\sigma_e^2 \leq \sigma_s^2$  i da za  $e$  važi Centralna granična teorema i Teorija uzoraka, pa je

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{N} \leq \frac{\sigma_s^2}{N}. \text{ Merna preciznost se može proceniti}$$

koristeći  $\frac{\sigma_s}{\sqrt{N}}$  kao gornju granicu merne greške.

Deterministička varijansa  $\sigma_d^2$  je osobina ulaznih determinističkih funkcija  $y_1 = f_1(t)$  i  $y_2 = f_2(t)$ .  $\sigma_d$  ne predstavlja grešku, pa može biti izostavljena iz daljeg razmatranja.

Varijansa  $\sigma_r^2$  takođe ne predstavlja grešku, ali, zapravo, predstavlja odstupanje mernih rezultata od

željene vrednosti  $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt$

prouzrokovano šumom  $n$ . Pogledajmo osobine veličine  $r = n \cdot y_2$ .

(i)  $r$  je slučajna veličina. Pošto je  $n$  slučajna a  $y_2$  deterministička veličina, sledi da je i  $r$  slučajna veličina,

$$(ii) \quad \bar{r} = \int_{-R}^R n \cdot p(n) dn \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt,$$

i ako je  $\bar{n} = 0$ , tada je  $\bar{r} = 0$ ,

(iii)  $r$  je ograničeno. Očigledno je da  $|r| \leq R^2$ .

(iv)  $M_3(r)$  je ograničeno:

$$M_3(r) = (\overline{r - \bar{r}})^3 = \overline{r^3} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-R}^R p(n) dn \int_{-R}^R n^3 \cdot y_2^3 \cdot \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-R}^R p(n) dn \int_{-R}^R |R^2|^3 \cdot \delta[y_2 - f_2(t)] dy_2 = R^6.$$

Osobina (vi) garantuje da za veličinu  $r$  takođe važi Centralna granična teorema i Teorija uzoraka.

Rezultat našeg merenja je  $\bar{\Psi}$ . Ako je  $\bar{n} = 0$ , tada je

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt. \text{ To znači da je merenje}$$

tačno. Postoje dve promenljive koje utiču na preciznost instrumenta:

- merna greška  $e$ , i
- šum  $n$

Promenljive su statistički nezavisne, pa se njihov uticaj može posmatrati nezavisno, pa je  $\sigma_e^2 + \sigma_r^2$  mera preciznosti instrumenta.

Gornja granica relativne greške je sad definisana kao:

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_r^2}}{\bar{\Psi}} \leq \frac{\sigma_s}{\bar{\Psi}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}}{\bar{\Psi}} = \Gamma_u \quad (23)$$

čime se i završava dokaz teoreme.

### 3. DISKUSIJA

Ako je  $y_1 = f_1(t)$  proizvoljna složenoperiodična funkcija, a  $y_2 = f_2(t) = \cos(i\omega t)$  onda je  $\bar{\Psi}$  polovina kosinusnog koeficijenta  $i$ -tog harmonika.  $\Gamma_t$  je tada granica relativne greške merenja Furijeovog koeficijenta i iz relacije (23) se vidi da se uticaj šuma na merenje koeficijenta smanjuje sa kvadratnim korenom iz broja odmeraka ulaznog zašumljenog signala  $z_1$ . Poznata Kramer – Rao granica kaže da se Furijeov koeficijent

meri sa apsolutnom greškom  $\sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sigma_n$  pod uslovom da je A/D konvertor idealan. Specificirajući  $\Delta_1 = 0$  (idealan

A/D konvertor),  $\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  i  $\bar{\Psi} = \frac{1}{2}$  u

relaciji (23), dobija se da je  $\Gamma_r$  upravo Kramer –Rao granica. Time se pokazuje da je relacija (23) opštija od Kramer –Rao granice jer uzima u obzir i činjenicu da ne postoji idealan A/D konvertor nego uzima u obzir i njegovu rezoluciju. Ako je A/D konvertor tipa fleš konvertora, onda  $N$  može biti vrlo veliko i uticaj šuma praktično može biti eliminisan. Ovo je naročito značajno kada se struja meri trafoom bez jezgra i to kao polazna struja brojila, ili pak ako se meri napon, takođe trafoom bez jezgra.

Metoda prikazana u radu pokazuje relativnu neosetljivost na šum u merenom signalu. Analizom relacije (23) dobijaju se prihvatljivi rezultati čak i kada je šum veći od signala. Na primer, za vrednost SNR-a od -10 dB granica gornje relativne greške je 0,3. Praktičan rezultat ovoga je da, trafo bez jezgra može biti upotrebljen kao senzor struje. Nizak SNR, pri malim vrednostima merene struje, što je inače i najveći problem pri merenjima sa trafoom bez jezgra, ne predstavlja problem za ovu metodu. Linearnost trafoa bez jezgra je najznačajnija njegova osobina i ona ga kvalifikuje za precizna merenja u elektroenergetskoj mreži koja danas više nije prostoperiodična.

#### 4. ZAKLJUČAK

Merenje signala, pri niskom SNR-u, je ozbiljan problem u merenjima. Uobičajeno se uzima vrednost SNR-a od 50÷70 dB. Niže vrednosti obično uzrokuju neprihvatljivo velike greške merenja.

Metoda prikazana u radu pokazuje relativnu neosetljivost na šum u merenom signalu. Dobijaju se prihvatljivi rezultati čak i kada je šum veći od signala. Za vrednost SNR-a od -10 dB granica gornje relativne greške je 0.3%. To potvrđuje razvijena teorija. Praktična posledica je da trafo bez jezgra može biti upotrebljen kao merni pretvarač struje.

#### 5. LITERATURA

- [1] J. von Neumann, "Probabilistic logic and the synthesis of reliable organisms from unreliable components", in Automata studies, CE Shannon, Ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956.
- [2] M.F. Wagdy, and W. Ng, "Validity of Uniform Quantization Error Model for Sinusoidal Signals Without and With Dither", IEEE Trans. Instrum. Meas, Vol. 38, pp. 718-722, June 1989.
- [3] E.M. Petriu, K. Watanabe, and T.H. Yeap, "Applications of Random-Pulse Machine Concept to Neural Network Design", IEEE Trans. Instrum. Meas, Vol. 45, pp. 665-669, April 1996.
- [4] V.Vujičić, S.Milovančev, M.Pešaljević, D.Pejić, I. Župunski: "Low Frequency Stochastic True RMS Instrument", IEEE Transaction on instrumentation and measurement, Vol. 48. April 1999, pp.467-470.
- [5] D. V. Pejic, V.V. Vujicic, "Accuracy Limit of High-Precision Stochastic Watt-Hour Meter", IEEE Trans. Instr. Meas, vol. 49, pp. 617-620, June 2000.
- [6] V. Vujičić: "Generalized Low Frequency Stochastic True RMS Instrument", IEEE Trans. Instrum. Meas, Vol. 50, No 5, pp 1089-1092, October 2001.
- [7] M. Karimi-Ghartemani, M. Reza Iravani, "Measurement of Harmonics/Inter-harmonics of Time-Varying Frequencies", IEEE Trans. on Power delivery, vol. 20, no. 1, january 2005, pp. 23-31.
- [8] Pjevalica V., Vujičić V., "Further Generalization of Low-frequency True RMS Instrument", Proceedings of IMTC 2005 Conference, Ottawa, Canada, May 2005.

#### STOCHASTIC INSTRUMENT ACCURACY LIMITS AT LOW SIGNAL-TO-NOISE RATIO

**Abstract:** *The impact of noise on stochastic instrument measurement results is theoretically treated in the paper. It is shown that derived formula for relative measurement uncertainty is general and Cramer-Rao lower bound (CRLB) represents its particular case*

**Key words:** *Stochastic measurements, harmonics measurement, noise, Cramer-Rao lower bound.*